Probabilistic Program Analysis

Demonstration `pWhile`

Alessandra Di Pierro
University of Verona, Italy
alessandra.dipierro@univr.it

Herbert Wiklicky
Imperial College London, UK
herbert@doc.ic.ac.uk

Structure and Convention of Tool

For an extended version of the probabilistic language pWHILE we have a tool which constructs the DTMC generator, i.e. LOS, for any program in the language.

We also need declarations of the finite ranges of each variable (allowing also for arrays) and we have random assignments as well as choices.

Conventions: Computational (probabilistic) states (as well as configurations) are represented by row vectors/distributions $\mathbf{p}$. We use post-multiplication $\mathbf{pT} = \mathbf{p}'$.

Randomised Counting

Example

Randomised Counting

$[c := 1]^1;\ [i := 0]^2;$
`while` $[c > 0]^3$ `do`
  $[\texttt{choose}]^4\ \frac{1}{2} : [i := i + 1]^5$ `or` $\frac{1}{2} : [c := 0]^6$ `ro`
`od;`
$[\texttt{skip}]^7$

Semantics

$$
\begin{aligned}
[\![P]\!] = \{ \ & \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{E}(1,2), \mathbf{F}_2 \otimes \mathbf{E}(2,3), \\
& \mathbf{P}(c > 0) \otimes \mathbf{E}(3,4), \mathbf{P}(c > 0)^{\perp} \otimes \mathbf{E}(3,7), \\
& 0.5 \cdot \mathbf{I} \otimes \mathbf{E}(4,5), 0.5 \cdot \mathbf{I} \otimes \mathbf{E}(4,6), \\
& \mathbf{F}_5 \otimes \mathbf{E}(5,3), \mathbf{F}_6 \otimes \mathbf{E}(6,3), \\
& \mathbf{I} \otimes \mathbf{E}(7,7) \ \}
\end{aligned}
$$

DTMC Generator

$$\mathbf{T}(P) = \mathbf{U}(c \leftarrow 1) \otimes \mathbf{E}(1,2) + \mathbf{U}(i \leftarrow 0) \otimes \mathbf{E}(2,3) +$$

$$\mathbf{P}(c > 0) \otimes \mathbf{E}(3,4) + \mathbf{P}(c > 0)^{\perp} \otimes \mathbf{E}(3,7) +$$

Implementation for Finite Loops

```
var
c :{0,1};
i :{0..10};

begin
c := 1;
i := 0;
while ( ( i<10 ) && ( c>0 ) ) do
  choose 1: i := i+1  or  1: c := 0 ro;
od;
stop;
end
```

State Space: $\mathcal{V}(\{0,1\}) \otimes \mathcal{V}(\{0,\ldots,10\}) \otimes \mathcal{V}(\{1,\ldots,7\}) = \mathbb{R}^{154}$

Demo: Counting up to 3

Bounding the counting loop by 3 ...

```
while ( ( i<3 ) && ( c>0 ) ) do
  choose 1: i := i+1  or  1: c := 0 ro;
```

...

State Space: $\mathcal{V}(\{0,1\}) \otimes \mathcal{V}(\{0,\ldots,3\}) \otimes \mathcal{V}(\{1,\ldots,7\}) = \mathbb{R}^{56}$

Enumeration of states (in tensor product)

1	...	$c \mapsto 0, i \mapsto 0$	5	...	$c \mapsto 1, i \mapsto 0$
2	...	$c \mapsto 0, i \mapsto 1$	6	...	$c \mapsto 1, i \mapsto 1$
3	...	$c \mapsto 0, i \mapsto 2$	7	...	$c \mapsto 1, i \mapsto 2$
4	...	$c \mapsto 0, i \mapsto 3$	8	...	$c \mapsto 1, i \mapsto 3$

Monty Hall

Monty Hall – Stick H_t

```
var
  d :{0,1,2}; g :{0,1,2}; o :{0,1,2};
begin
d ?= {0,1,2}; # Pick winning door
g ?= {0,1,2}; # Pick guessed door
o ?= {0,1,2}; # Open empty door
while ((o == g) || (o == d)) do
  o := (o+1)%3; od;
# Stick with guess
stop; # looping
end
```

Monty Hall – Stick H_t

```
var
  d :{0,1,2};   g :{0,1,2};   o :{0,1,2};
begin
[d ?= {0,1,2}]^1;
[g ?= {0,1,2}]^2;
[o ?= {0,1,2}]^3;
while [((o == g)||(o == d))]^4 do
  [o := (o+1)%3]^5;
od;
[stop]^6;
end
```


Monty Hall H_t – Blocks and Flow

$blocks(H_t) =$

$= \{$`[d ?= { 0, 1, 2 }]`^{1}, `[g ?= { 0, 1, 2 }]`^{2},
`[o ?= { 0, 1, 2 }]`^{3}, `[((o == g)||(o == d))]`^{4},
`[o := ((o + 1) % 3)]`^{5}, `[stop]`$^6\}$

$flow(H_t) =$

$$= \{(1,1,2),(2,1,3),(3,1,4),(4,1,\underline{5}),(5,1,4),(4,1,6),(6,1,6)\}$$

Monty Hall – Stick H_t

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}(H_t) \quad = \quad & \frac{1}{3}(\mathbf{U}(\mathtt{d} \leftarrow 0) + \mathbf{U}(\mathtt{d} \leftarrow 1) + \mathbf{U}(\mathtt{d} \leftarrow 2)) \otimes \mathbf{E}(1,2) + \\
& \frac{1}{3}(\mathbf{U}(\mathtt{g} \leftarrow 0) + \mathbf{U}(\mathtt{g} \leftarrow 1) + \mathbf{U}(\mathtt{g} \leftarrow 2)) \otimes \mathbf{E}(2,3) + \\
& \frac{1}{3}(\mathbf{U}(\mathtt{o} \leftarrow 0) + \mathbf{U}(\mathtt{o} \leftarrow 1) + \mathbf{U}(\mathtt{o} \leftarrow 2)) \otimes \mathbf{E}(3,4) + \\
& \mathbf{P}((\mathtt{o} == \mathtt{g}) || (\mathtt{o} == \mathtt{d}) = \mathbf{tt}) \otimes \mathbf{E}(4,5) + \\
& \mathbf{P}((\mathtt{o} == \mathtt{g}) || (\mathtt{o} == \mathtt{d}) = \mathbf{ff}) \otimes \mathbf{E}(4,6) + \\
& \mathbf{I} \otimes \mathbf{E}(6,6)
\end{aligned}
$$

Monty Hall – Switch H_w

```
var
  d :{0,1,2}; g :{0,1,2}; o :{0,1,2};
begin
d ?= {0,1,2}; # Pick winning door
g ?= {0,1,2}; # Pick guessed door
o ?= {0,1,2}; # Open empty door
while ((o == g) || (o == d)) do
  o := (o+1)%3; od;
g := (g+1)%3; # Switch guess
while (g == o) do
  g := (g+1)%3; od;
stop; # looping
end
```

Monty Hall – Switch H_w

```
var
  d :{0,1,2};   g :{0,1,2};   o :{0,1,2};
begin
[d ?= {0,1,2}]^1;
[g ?= {0,1,2}]^2;
[o ?= {0,1,2}]^3;
while [((o == g)||(o == d))]^4 do
  [o := (o+1)%3]^5;
od;
[g := (g+1)%3]^6;
while [(g == o)]^7 do
  [g := (g+1)%3]^8;
od;
[stop]^9;
end
```


Monty Hall H_t – Blocks and Flow

$$
\begin{aligned}
&\mathit{blocks}(H_w) = \\
&= \{\texttt{[d ?= \{ 0, 1, 2 \}]}^1, \texttt{[g ?= \{ 0, 1, 2 \}]}^2, \\
&\quad \texttt{[o ?= \{ 0, 1, 2 \}]}^3, \texttt{[((o == g)||(o == d))]}^4, \\
&\quad \texttt{[o := ((o + 1) \% 3)]}^5, \texttt{[g := ((g + 1) \% 3)]}^6, \\
&\quad \texttt{[(g == o)]}^7, \texttt{[g := ((g + 1) \% 3)]}^8, \texttt{[stop]}^9\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathit{flow}(H_w) = \\
&= \{(1,1,2),(2,1,3),(3,1,4),(4,1,\underline{5}),(5,1,4),(4,1,6), \\
&\quad (6,1,7),(7,1,\underline{8}),(8,1,7),(7,1,9),(9,1,9)\}
\end{aligned}
$$

Monty Hall – Switch H_w

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}(H_w) \quad = \quad & \frac{1}{3}(\mathbf{U}(\mathtt{d} \leftarrow 0) + \mathbf{U}(\mathtt{d} \leftarrow 1) + \mathbf{U}(\mathtt{d} \leftarrow 2)) \otimes \mathbf{E}(1,2) + \\
& \frac{1}{3}(\mathbf{U}(\mathtt{g} \leftarrow 0) + \mathbf{U}(\mathtt{g} \leftarrow 1) + \mathbf{U}(\mathtt{g} \leftarrow 2)) \otimes \mathbf{E}(2,3) + \\
& \frac{1}{3}(\mathbf{U}(\mathtt{o} \leftarrow 0) + \mathbf{U}(\mathtt{o} \leftarrow 1) + \mathbf{U}(\mathtt{o} \leftarrow 2)) \otimes \mathbf{E}(3,4) + \\
& \mathbf{P}((\mathtt{o} == \mathtt{g}) || (\mathtt{o} == \mathtt{d}) = \mathbf{tt}) \otimes \mathbf{E}(4,5) + \\
& \mathbf{P}((\mathtt{o} == \mathtt{g}) || (\mathtt{o} == \mathtt{d}) = \mathbf{ff}) \otimes \mathbf{E}(4,6) + \\
& \mathbf{U}(\mathtt{g} \leftarrow (g+1)\%3) \otimes \mathbf{E}(6,7) + \\
& \mathbf{P}((\mathtt{g} == \mathtt{o}) = \mathbf{tt}) \otimes \mathbf{E}(7,8) + \\
& \mathbf{P}((\mathtt{g} == \mathtt{o}) = \mathbf{ff}) \otimes \mathbf{E}(7,9) + \\
& \mathbf{U}(\mathtt{g} \leftarrow (g+1)\%3) \otimes \mathbf{E}(6,7) + \mathbf{I} \otimes \mathbf{E}(9,9)
\end{aligned}
$$

Monty Hall – Enumeration

1	...	$(\mathtt{d} \mapsto 0, \mathtt{g} \mapsto 0, \mathtt{o} \mapsto 0)$	15	...	$(\mathtt{d} \mapsto 1, \mathtt{g} \mapsto 1, \mathtt{o} \mapsto 2)$
2	...	$(\mathtt{d} \mapsto 0, \mathtt{g} \mapsto 0, \mathtt{o} \mapsto 1)$	16	...	$(\mathtt{d} \mapsto 1, \mathtt{g} \mapsto 2, \mathtt{o} \mapsto 0)$
3	...	$(\mathtt{d} \mapsto 0, \mathtt{g} \mapsto 0, \mathtt{o} \mapsto 2)$	17	...	$(\mathtt{d} \mapsto 1, \mathtt{g} \mapsto 2, \mathtt{o} \mapsto 1)$
4	...	$(\mathtt{d} \mapsto 0, \mathtt{g} \mapsto 1, \mathtt{o} \mapsto 0)$	18	...	$(\mathtt{d} \mapsto 1, \mathtt{g} \mapsto 2, \mathtt{o} \mapsto 2)$
5	...	$(\mathtt{d} \mapsto 0, \mathtt{g} \mapsto 1, \mathtt{o} \mapsto 1)$	19	...	$(\mathtt{d} \mapsto 2, \mathtt{g} \mapsto 0, \mathtt{o} \mapsto 0)$
6	...	$(\mathtt{d} \mapsto 0, \mathtt{g} \mapsto 1, \mathtt{o} \mapsto 2)$	20	...	$(\mathtt{d} \mapsto 2, \mathtt{g} \mapsto 0, \mathtt{o} \mapsto 1)$
7	...	$(\mathtt{d} \mapsto 0, \mathtt{g} \mapsto 2, \mathtt{o} \mapsto 0)$	21	...	$(\mathtt{d} \mapsto 2, \mathtt{g} \mapsto 0, \mathtt{o} \mapsto 2)$
8	...	$(\mathtt{d} \mapsto 0, \mathtt{g} \mapsto 2, \mathtt{o} \mapsto 1)$	22	...	$(\mathtt{d} \mapsto 2, \mathtt{g} \mapsto 1, \mathtt{o} \mapsto 0)$
9	...	$(\mathtt{d} \mapsto 0, \mathtt{g} \mapsto 2, \mathtt{o} \mapsto 2)$	23	...	$(\mathtt{d} \mapsto 2, \mathtt{g} \mapsto 1, \mathtt{o} \mapsto 1)$
10	...	$(\mathtt{d} \mapsto 1, \mathtt{g} \mapsto 0, \mathtt{o} \mapsto 0)$	24	...	$(\mathtt{d} \mapsto 2, \mathtt{g} \mapsto 1, \mathtt{o} \mapsto 2)$
11	...	$(\mathtt{d} \mapsto 1, \mathtt{g} \mapsto 0, \mathtt{o} \mapsto 1)$	25	...	$(\mathtt{d} \mapsto 2, \mathtt{g} \mapsto 2, \mathtt{o} \mapsto 0)$
12	...	$(\mathtt{d} \mapsto 1, \mathtt{g} \mapsto 0, \mathtt{o} \mapsto 2)$	26	...	$(\mathtt{d} \mapsto 2, \mathtt{g} \mapsto 2, \mathtt{o} \mapsto 1)$
13	...	$(\mathtt{d} \mapsto 1, \mathtt{g} \mapsto 1, \mathtt{o} \mapsto 0)$	27	...	$(\mathtt{d} \mapsto 2, \mathtt{g} \mapsto 2, \mathtt{o} \mapsto 2)$
14	...	$(\mathtt{d} \mapsto 1, \mathtt{g} \mapsto 1, \mathtt{o} \mapsto 1)$			

Monty Hall – $\mathbf{T}(1,2)$

$$\mathbf{T}(1,2) = \begin{pmatrix}
\frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}
\end{pmatrix} \otimes \mathbf{E}(1,2)$$

Monty Hall – $\mathbf{T}(2,3)$

$$\mathbf{T}(2,3) = \begin{pmatrix}
\frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \frac{1}{3}
\end{pmatrix} \otimes \mathbf{E}(2,3)$$

Monty Hall – $\mathbf{T}(3,4)$

$$\mathbf{T}(3,4) = \begin{pmatrix}
\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13&\cdot&\cdot&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\tfrac13&\tfrac13&\tfrac13
\end{pmatrix} \otimes \mathbf{E}(3,4)$$

Monty Hall – $\mathbf{T}(4,\underline{5})$ and $\mathbf{T}(4,6)$

$$\mathbf{T}(4,\underline{5}) = \text{diag}\,(1\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1) \otimes \mathbf{E}(4,5)$$

$$\mathbf{T}(4,6) = \text{diag}\,(0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0) \otimes \mathbf{E}(4,6)$$

Monty Hall – $\mathbf{T}(5,4)$

$$
\mathbf{T}(5,4) = \begin{pmatrix}
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & .
\end{pmatrix} \otimes \mathbf{E}(5,4)
$$

Monty Hall – $\mathbf{T}(6,7)$

$$
\mathbf{T}(6,7) = \begin{pmatrix}
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix} \otimes \mathbf{E}(6,7)
$$

Monty Hall – $\mathbf{T}(7,\underline{8})$ and $\mathbf{T}(7,9)$

$$\mathbf{T}(7,\underline{8}) = \mathrm{diag}\left(1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\right) \otimes \mathbf{E}(7,8)$$

$$\mathbf{T}(7,9) = \mathrm{diag}\left(0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,0\right) \otimes \mathbf{E}(7,9)$$

Monty Hall – $\mathbf{T}(8,7)$

$$\mathbf{T}(8,7) = \begin{pmatrix}
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix} \otimes \mathbf{E}(8,7)$$

Monty Hall – $\mathbf{T}(H_s)$ and $\mathbf{T}(H_s)$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(H_t) &= \mathbf{T}(1,2)+\mathbf{T}(2,3)+\mathbf{T}(3,4)+\mathbf{T}(4,\underline{5})+\mathbf{T}(5,4)+\mathbf{T}(4,6)+\\ &+ \mathbf{I}\otimes\mathbf{E}(6,6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(H_w) &= \mathbf{T}(1,2)+\mathbf{T}(2,3)+\mathbf{T}(3,4)+\mathbf{T}(4,\underline{5})+\mathbf{T}(5,4)+\mathbf{T}(4,6)+\\ &+ \mathbf{T}(6,7)+\mathbf{T}(7,\underline{8})+\mathbf{T}(8,7)+\mathbf{T}(7,9)+\mathbf{I}\otimes\mathbf{E}(9,9)\end{aligned}$$

$$\dim(\mathbf{T}(H_t)) = 27\cdot 5 = 162 \text{ and } \dim(\mathbf{T}(H_w)) = 27\cdot 9 = 243$$

Abstractions and Analysis: Monty Hall

Initial configurations 162 or 243 dimensional (labels dim $= 6/9$)

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

Final configurations of the same dimension, non-zero entries:

$$\text{for } H_t: \begin{cases} x_{12} = 0.074074 \\ x_{18} = 0.037037 \\ x_{36} = 0.11111 \\ x_{48} = 0.11111 \\ x_{72} = 0.11111 \\ x_{78} = 0.037037 \\ x_{90} = 0.074074 \\ x_{96} = 0.11111 \\ x_{120} = 0.11111 \\ x_{132} = 0.11111 \\ x_{150} = 0.074074 \\ x_{156} = 0.037037 \end{cases} \quad \text{for } H_w: \begin{cases} x_{18} = 0.11111 \\ x_{27} = 0.11111 \\ x_{54} = 0.037037 \\ x_{72} = 0.074074 \\ x_{108} = 0.074074 \\ x_{117} = 0.11111 \\ x_{135} = 0.11111 \\ x_{144} = 0.037037 \\ x_{180} = 0.037037 \\ x_{198} = 0.074074 \\ x_{225} = 0.11111 \\ x_{234} = 0.11111 \end{cases}$$

Extracting results: Monty Hall

Consider the terminal configurations (with "$\infty = 100$"):

$$x_t = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{T}(H_t))^n x_0 \text{ and } x_w = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{T}(H_w))^n x_0$$

Abstract relevant information with $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ and $\mathbf{A}_f = (1, 1, \ldots, 1)^t$:

$$\vec{x}_t \cdot (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_f \otimes \mathbf{A}_f) =$$
$$\begin{pmatrix} 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 & 0.11 \end{pmatrix}$$

$$x_w \cdot (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{A}_f \otimes \mathbf{A}_f) =$$
$$\begin{pmatrix} 0.22 & 0.04 & 0.07 & 0.07 & 0.22 & 0.04 & 0.04 & 0.07 & 0.22 \end{pmatrix}$$

Monty Hall: Optimal Strategy

With further abstraction $\mathbf{A}_w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ldots & d \mapsto 0, g \mapsto 0 \\ \ldots & d \mapsto 0, g \mapsto 1 \\ \ldots & d \mapsto 0, g \mapsto 2 \\ \ldots & d \mapsto 1, g \mapsto 0 \\ \ldots & d \mapsto 1, g \mapsto 1 \\ \ldots & d \mapsto 1, g \mapsto 2 \\ \ldots & d \mapsto 2, g \mapsto 0 \\ \ldots & d \mapsto 2, g \mapsto 1 \\ \ldots & d \mapsto 2, g \mapsto 2 \end{matrix}$

we get

$$x_t \cdot (\mathbf{A}_w \otimes \mathbf{A}_f \otimes \mathbf{A}_f) = \begin{pmatrix} 0.33333 & 0.66667 \end{pmatrix}$$

$$x_w \cdot (\mathbf{A}_w \otimes \mathbf{A}_f \otimes \mathbf{A}_f) = \begin{pmatrix} 0.66667 & 0.33333 \end{pmatrix}$$